

2.12.

Přímule: obvej = kružnice

=> dosaz. metoda s metodou

matka typu $x^2 + y^2 = a^2$ vede

na $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$... ošklivost
derivace

Všudek: matice, determinant

Def: matice $m \times n$ = obdelniková

tabulka o m řádcích
a n sloupcích

Pr: matice 2×3

.	.	.
.	.	.

Označme matice řádku A_i ,

ne pozici (i, j) , tj. n i-tém

řádkem, j -tém sloupcem, ležící prvek a_{ij}

bede a_{ij} = číslo nebo fce

Pr: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$a_{11} = 3, a_{12} = 1, \text{ a.t.d.}$

Spec. případy:

$m = 1$ (1 řádek) ... řádkový vektor

$n = 1$ (1 sloupec) ... sloupcový vektor

Def: Jacobiho matice fce $f(x_1, \dots, x_n)$

je řádkový vektor (= matice $1 \times n$)

$J_f = (\partial_{x_1} f \quad \partial_{x_2} f \quad \dots \quad \partial_{x_n} f)$

leží k řádku: gradient fce f

Pr: $f(x, y) = x^2 \cdot y^3$

$J_f = (2xy^3 \quad 3x^2y^2)$

Platí: bod $[x_1, \dots, x_n]$ je stacion.
bodem fce $f \Leftrightarrow$

$$J_f(x_1, \dots, x_n) = (0 \dots 0)$$

Jacobiova matice dvojice fce

$$f(x, y), g(x, y) \Rightarrow$$

$$J = J_{fg} = \begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_y f \\ \partial_x g & \partial_y g \end{pmatrix}$$

Def: determinant matice 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \dots \text{determinant je}$$

$$\text{číslo } \det A = |A| = a \cdot d - b \cdot c$$

$\nearrow$
(pozor! s abs. hodnotou!)

$$\underline{\text{Př:}} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = 14 - 15 = \underline{\underline{-1}}$$

Def: jacobian dvojice fce f, g
(dva proměnných) je determinant
jejich Jacobiovy matice:

$$\det J = \det \begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_y f \\ \partial_x g & \partial_y g \end{pmatrix} =$$

$$(\partial_x f) \cdot (\partial_y g) - (\partial_y f) \cdot (\partial_x g)$$

Tedy jacobian je opět fce
(dva proměnných).

Metoda jacobianu

(pro dvě proměnné):

hledáme extrém fce $f(x,y)$ na množině $M \subset \mathbb{R}^2$, jejíž obraz je dán vztahem $g(x,y)=0$.

Kandidáti na extrém na M

jsou pak právě řešení soustavy rovnic

$$\begin{cases} \det J(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

PP: Najděte extrém fce

$f(x,y)=2x-y$ na elipse

$$M = \{ [x,y] \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + 2y^2 \leq 18 \}$$

A) určíme M : kandidáti nejmu
(f je lineární!)

B) na obrazu M : M je dán

vztahem $x^2 + 2y^2 = 18$

$\Rightarrow g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 18 = 0$

vztah

Jacobiova matice:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2x & 4y \end{pmatrix}$$

jacobian: $\det J = 2 \cdot 4y - (-1) \cdot 2x = 8y + 2x$

$\Rightarrow$ soustava $8y + 2x = 0$ (1)

$x^2 + 2y^2 - 18 = 0$ (2)

z rovnice (1) vyjádříme x pomocí y :
 $2x = -8y$, $x = -4y$

Toto dosadíme do (2):

$$(-4y)^2 + 2y^2 = 18$$

$$16y^2 + 2y^2 = 18$$

$$18y^2 = 18 \quad | :18$$

$$y^2 = 1$$

$$\underline{y = \pm 1}$$

Ze vztahu $x = -4y$ dopočteme x:

$$y = 1 \dots x = -4$$

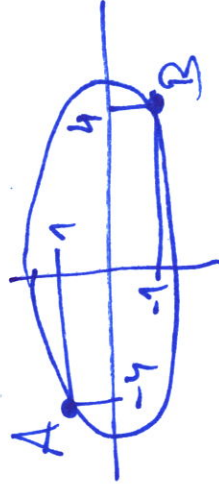
$$y = -1 \dots x = +4$$

$\Rightarrow$ 2 kandidáty: $A = [-4, 1], B = [4, -1]$.

© Dosadíme, porovnáme:

$$A = [-4, 1], f(-4, 1) = \underline{\underline{-9 \text{ MIN}}}$$

$$B = [4, -1], f(4, -1) = \underline{\underline{9 \text{ MAX}}}$$



Metoda Lagrangeových množičností (L1)

(pro 2 proměnné a 1 vazbu)

Zadáno: fce $f(x, y) \dots$ její extrém hledáme

$$g(x, y) = 0 \dots \text{vazba}$$

Postup: nejprve zavedeme tzv.

Lagrangeovu fci L:

$$L(x, y, d) = f(x, y) + d \cdot g(x, y)$$

LAMBDA ... množičnost

(nově přidaná proměnná)

Dále spočítáme parciální derivace fce L podle všech 3 proměnných a položíme je rovné 0.

Dostáváme tak soustavu

$$\begin{cases} \partial_x L = 0 \\ \partial_y L = 0 \\ \partial_d L = g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Rov: parc. derivace L podle d

je totožná se zadanou vztahem $g(x, y)$.

Dostali jsme tedy soustavu 3 rovnic o 3 neznámých (x, y, d) . Její řešení $[x, y]$ jsou kandidáti na extrém.

Rov: je-li vlna, "dobře zadaná", vychází konečný počet řešení.

R: (stejný jako Jacobian):

$$f(x, y) = 2x - y$$

$$\text{vztah } g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 18 = 0$$

$$L(x, y, d) = 2x - y + d \cdot (x^2 + 2y^2 - 18)$$

parc. derivace L :

$$\partial_x L = 2 + 2dx = 0 \quad (1)$$

$$\partial_y L = -1 + 4dy = 0 \quad (2)$$

$$\partial_d L = g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 18 = 0 \quad (3)$$

Řešení: z (1) a (2) vyjádříme x a y pomocí d , a to pak dosadíme do (3):

$$(1) \quad 2 + 2dx = 0 \quad / -2$$

$$2dx = -2 \quad / : 2d$$

$$x = \frac{-2}{2d} = -\frac{1}{d}$$

Můžeme být $d=0$?

Pohlédneme by bylo $d=0$, pak

$$\text{rovnice (1): } 2 + 2 \cdot 0 \cdot x = 0 \\ 2 = 0$$

toto rovnice nemůže $\Rightarrow d \neq 0$.

$$(2) \quad \frac{-1 + 4dy = 0}{4dy = 1} \quad / +1 \\ \boxed{y = \frac{1}{4d}}$$

Tyto vztahy dosadíme do (3):

$$\left(-\frac{1}{d}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4d}\right)^2 = 18$$

$$\frac{1}{d^2} + \frac{2}{16d^2} = 18$$

$$\frac{16+2}{16d^2} = 18 \quad / :18$$

$$\frac{1}{16d^2} = 1 \quad / \cdot d^2$$

$$\frac{1}{16} = d^2$$

$$\boxed{d = \pm \frac{1}{4}} \Leftarrow$$

Tyto hodnoty d dosadíme do vztahů pro x a y :

$$a) \quad d_1 = \frac{1}{4}, \quad x_1 = -\frac{1}{d_1} = -4 \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \underline{\underline{[-4, 1]}} \\ y_1 = \frac{1}{4d_1} = 1 \end{array} \right.$$

$$b) \quad d_2 = -\frac{1}{4}, \quad x_2 = -\frac{1}{d_2} = 4 \quad \left\{ \begin{array}{l} B = \underline{\underline{[4, -1]}} \\ y_2 = \frac{1}{4d_2} = -1 \end{array} \right.$$

Výsledky stejné body jako u metody Jacobianu, zbytek už je stejný.

Porovnání obou metod:

1) LM je méně pracnější než Jac

2) Metoda LM spočítá i hodnoty d
(budou užitečné v ekonomii)

Př: Určete extrémy fce

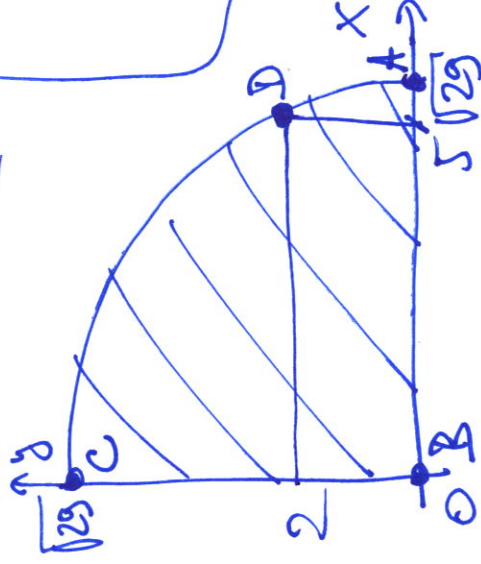
$$f(x,y) = 5x + 2y \text{ na množině}$$

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 29\}$$

Obrazek:

M = čtvercuk
o poloměru $\sqrt{29}$

$$\sqrt{29} \in (5,6)$$



Hledáme kandidáty:

(A) M^0 : f lineární $\Rightarrow$ žádné nejstn

(B) $\partial M = \{ \rightarrow \cup \downarrow \cup \curvearrowright \}$ v vrcholech

$\underbrace{\text{lineární vzhled}}_{+ f \text{ je lineární}} \Rightarrow$ žádné kandy.

na oblouku: tam je dan vektor

$$x^2 + y^2 = 29 \quad \text{s omezeními} \\ x > 0, y > 0$$

spatíme to oběma metodami,
dnes zatím jen:

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

$$\det J = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 5 \cdot 2y - 2 \cdot 2x =$$

$$= 10y - 4x = 2(5y - 2x)$$

$$\Rightarrow \text{soustavu } 2(5y - 2x) = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = 29 \quad (2)$$

Řešení: z (1) vyjádříme

$$\text{x pomocí y: } 5y = 2x$$

$$\left| x = \frac{5}{2}y \right|$$

Toto dosadíme do (2):

$$\left(\frac{5}{2}y\right)^2 + y^2 = 29$$

$$\frac{25}{4}y^2 + y^2 = 29$$

$$\frac{25+4}{4}y^2 = 29 \quad | :29$$

$$\frac{y^2}{4} = 1$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2 \Leftrightarrow$$

Dopodítkáme x (ze $x = \frac{5}{2}y$):

$$y_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 5, \quad D = [5, 2] \in M$$

je kandidát

$$y_2 = -2 \Rightarrow x_2 = -5, \quad [-5, -2] \notin M$$

Vrchol: $A = [129, 0]$

$$B = [0, 0]$$

$$C = [0, 129]$$

© Dosadíme, porovnáme:

$$A: f(129, 0) = 5 \cdot 129$$

$$B: f(0, 0) = 0 \quad \underline{\underline{MIN}}$$

$$C: f(0, 129) = 2 \cdot 129$$

$$D: f(5, 2) = 5 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 29 \quad \underline{\underline{MAX}}$$